

# SÓNG LAMB TRUYỀN TRONG CẤU TRÚC SANDWICH

Nguyễn Thị Khánh Linh

Bộ môn Cơ học kỹ thuật, Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi

Email: ntklinh@tlu.edu.vn

## 1. TÓM TẮT

Trong báo cáo này, tác giả nghiên cứu sự truyền của sóng Lamb trong cấu trúc sandwich trục hướng. Giả thiết vật liệu của 2 lớp ngoài và lớp lõi là đàn hồi trục hướng nén được. Mục đích của bài báo là đưa ra phương trình tán sắc của sóng Lamb. Các phương trình ở dạng hoàn toàn tường minh, chúng sẽ là công cụ hữu hiệu cho các nhà khoa học trong và ngoài nước sử dụng trong nghiên cứu.

## 2. GIỚI THIỆU

Cùng với sự phát triển của công nghệ sản xuất và vật liệu trong ngành xây dựng, hàng không, hải quân... cấu trúc Sandwich với khả năng chịu lực, cách âm và cách nhiệt cao đã ra đời và dần trở thành vật liệu lý tưởng trong các công trình xây dựng, chế tạo máy bay, chế tạo tàu ngầm, tàu thủy... Ngoài ra, tấm sandwich còn có các ưu điểm như: Trọng lượng nhẹ, chi phí bảo hành thấp, có khả năng tái sử dụng, vòng đời sản phẩm dài từ 30 - 50 năm, công trình có tính thẩm mỹ cao... Chi phí cho các công trình xây dựng khi sử dụng tấm sandwich thấp hơn từ 30 - 40% so với các vật liệu truyền thống như gạch, thép, gỗ...

Thực tiễn đặt ra, sau khi chế tạo ra loại vật liệu này và đem ra sử dụng, các nhà sản xuất trước khi mang ra sử dụng người ta phải kiểm tra chất lượng của sản phẩm (các tính chất cơ học của các lớp). Khi đã mang ra sử dụng ngoài thực tiễn rồi, sau một thời gian sử dụng nhất định các tính chất cơ học của các lớp sẽ thay đổi và liên kết giữa các lớp vật liệu này sẽ yếu đi và để đảm bảo an toàn

cho các công trình, người ta cũng thường xuyên phải kiểm, đánh giá sự bền của vật liệu. Trong nhiều phương pháp đánh giá, phương pháp truyền sóng được sử dụng rộng rãi nhất, vì nó không gây phá hủy, thời gian kiểm tra ngắn, giá thành rẻ. Trong các sóng mặt được sử dụng, sóng Lamb là các công cụ thuận tiện. Phương trình tán sắc dạng hiện của sóng là cơ sở lý thuyết để rút ra các tính chất cơ học của của các lớp từ các số liệu đo được từ thực nghiệm.

Sóng Lamb là sóng truyền trong các đĩa hoặc trong các cấu trúc bản vỏ. Các sóng này lần đầu tiên được phát hiện ra bởi nhà khoa học người Anh Horace Lamb [2]. Trong bài báo, ông đã đưa ra được phương trình tán sắc cho sóng Lamb cho một lớp vật liệu đẳng hướng. Năm 1979, Lee và Chang [3] đã tìm ra phương trình tán sắc của sóng Lamb cho cấu trúc sandwich của vật liệu đẳng hướng. Tuy nhiên, phương trình này chỉ ở dạng định thức bậc 6. Năm 2017, Kaplunov và cộng sự [1] đã đưa được ra dạng tường minh của phương trình tán sắc cho sóng Lamb trong môi trường sandwich. Đối với cấu trúc sandwich cho các môi trường dị hướng phức tạp hơn vẫn chưa đưa ra được phương trình tán sắc.

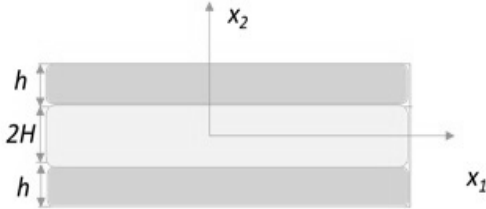
Vì vậy mục tiêu của báo cáo đi tìm phương trình tán sắc của sóng Lamb truyền trong cấu trúc sandwich của môi trường trục hướng nén được.

## 3. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét môi trường phân lớp gồm 3 lớp vật liệu đàn hồi trục hướng nén được. Giả sử lớp thứ 1 và lớp thứ 3 được tạo ra cùng một loại vật liệu và mỗi lớp có độ dày hữu hạn  $h$ , còn lớp thứ 2

được cấu tạo từ vật liệu đàn hồi trục hướng khác với vật liệu của 2 lớp trên có độ dày  $2H$ . Giả sử các lớp là gắn chặt với nhau. Chú ý rằng các đại lượng giống nhau của lớp 1, 2, 3 có cùng ký hiệu nhưng được phân biệt bằng dấu gạch ngang ở trên nếu liên quan đến 2 lớp ngoài. Tại trạng thái biến dạng ban đầu, ta sử dụng hệ tọa độ Đề - Các vuông góc chung cho cả môi trường xem hình 1.

Xét trạng thái biến dạng phẳng



Hình 1

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(x_1, x_2, t), \bar{u}_i = \bar{u}_i(x_1, x_2, t), \\ u_3 &= 0, \bar{u}_3 = 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Bỏ qua lực khối, phương trình chuyển động của các lớp

$$\bar{\sigma}_{11,1} + \bar{\sigma}_{12,2} = \bar{\rho}\ddot{u}_1, \bar{\sigma}_{12,1} + \bar{\sigma}_{22,2} = \bar{\rho}\ddot{u}_2 \quad (2)$$

Trong đó:

$\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{22}$  - các ứng suất. Chúng liên hệ với chuyển dịch bởi hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \bar{c}_{11}\bar{u}_{1,1} + \bar{c}_{12}\bar{u}_{2,2}, \bar{\sigma}_{22} = \bar{c}_{12}\bar{u}_{1,1} + \bar{c}_{22}\bar{u}_{2,2}, \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{c}_{66}(\bar{u}_{1,2} + \bar{u}_{2,1}) \end{aligned} \quad (3)$$

Điều kiện liên tục giữa các lớp:

$$\sigma_{ij}(H) = \bar{\sigma}_{ij}(H), \sigma_{ij}(-H) = \bar{\sigma}_{ij}(-H), i, j = 1, 2. \quad (4)$$

Điều kiện tự do ứng suất tại  $x_2 = h, x_2 = -h$  của lớp thứ 1 và lớp thứ 3

$$\bar{\sigma}_{12}(h) = \bar{\sigma}_{22}(h) = \bar{\sigma}_{12}(-h) = \bar{\sigma}_{22}(-h) = 0 \quad (5)$$

#### 4. ĐIỀU KIỆN BIÊN HIỆU DỤNG CHÍNH XÁC

Xét lớp vật liệu thứ nhất được cấu tạo bởi vật liệu đàn hồi trục hướng nên được chiếm miền  $H < x_2 < h$ . Các chuyển dịch và ứng suất của sóng có dạng:

$$\bar{u}_i = \bar{U}_i(x_2)e^{ik(x_1 - ct)}, \bar{\sigma}_{i2} = k\bar{\Sigma}_i(x_2)e^{ik(x_1 - ct)}, i = 1, 2. \quad (6)$$

Trong đó:  $\bar{U}_i, \bar{\Sigma}_i$ , được xác định trong [4].

Thay thế lớp thứ nhất bằng một điều kiện biên: Sử dụng phương trình (20) trong [4] với  $x_2 = H + h, b = H + h, y = k(x_2 - a), b - a = h, a = H$ , ta có:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1^+ \\ \bar{\Sigma}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_{11} & \hat{n}_{12} \\ \hat{n}_{21} & \hat{n}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1^+ \\ \bar{U}_2^+ \end{bmatrix} \quad (7)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \hat{n}_{11} &= (\hat{m}_{31}\hat{m}_{44} - \hat{m}_{34}\hat{m}_{41}) / \theta, \\ \hat{n}_{12} &= (\hat{m}_{32}\hat{m}_{44} - \hat{m}_{34}\hat{m}_{42}) / \theta \\ \hat{n}_{21} &= (\hat{m}_{33}\hat{m}_{41} - \hat{m}_{31}\hat{m}_{43}) / \theta, \hat{n}_{22} \\ &= (\hat{m}_{33}\hat{m}_{42} - \hat{m}_{32}\hat{m}_{43}) / \theta \\ \theta &= -\hat{m}_{34}\hat{m}_{43} + \hat{m}_{33}\hat{m}_{44} \end{aligned}$$

và  $\hat{m}_{ij}$  xác định trong [4]:

Phương trình (7) liên hệ giữa véc tơ ứng suất và véc tơ chuyển dịch của lớp tại  $x_2 = H$  được gọi là điều kiện biên hiệu dụng chính xác dưới dạng ma trận. Nó thay thế ảnh hưởng của toàn bộ lớp hữu hạn lớp thứ nhất lên lớp thứ 2.

Thay thế lớp thứ 3 một điều kiện biên: Thực hiện các tính toán tương tự như việc thay thế lớp thứ nhất bằng điều kiện biên (8), ta thay thế lớp thứ 3 bằng điều kiện biên sau:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1^- \\ \Sigma_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^- \\ U_2^- \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$n_{11} = -\hat{n}_{11}, n_{12} = \hat{n}_{12}, n_{21} = -\hat{n}_{21}, n_{22} = -\hat{n}_{22} \quad (9)$$

Phương trình (8) liên hệ giữa véc tơ ứng suất và véc tơ chuyển dịch của lớp tại  $x_2 = -H$  được gọi là điều kiện biên hiệu dụng chính xác dưới dạng ma trận. Nó thay thế ảnh hưởng của toàn bộ lớp hữu hạn lớp thứ 3 lên lớp thứ 2.

#### 5. PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC CHÍNH XÁC

Từ các phương trình (7), (8), (9), ta có:

$$\begin{aligned} &\{(\beta_1 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_1) \text{ch } \bar{\varepsilon}_1 - \hat{n}_{11} \text{sh } \bar{\varepsilon}_1\} B_2 \\ &+ \{(\beta_2 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_2) \text{ch } \bar{\varepsilon}_2 - \hat{n}_{11} \text{sh } \bar{\varepsilon}_2\} B_4 = 0 \\ &\{i\bar{\gamma}_1 - \hat{n}_{21}\} \text{sh } \bar{\varepsilon}_1 - i\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_1 \text{ch } \bar{\varepsilon}_1\} B_2 \\ &+ \{i\bar{\gamma}_2 - \hat{n}_{21}\} \text{sh } \bar{\varepsilon}_2 - i\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_2 \text{ch } \bar{\varepsilon}_1\} B_4 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \{(\beta_1 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_1)\text{sh}\bar{\varepsilon}_1 - \hat{n}_{11}\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\} B_1 \\ & + \{(\beta_2 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_2)\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 - \hat{n}_{11}\text{ch}\bar{\varepsilon}_2\} B_3 = 0 \\ & \{(i\bar{\gamma}_1 - \hat{n}_{21})\text{ch}\bar{\varepsilon}_1 - i\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_1\} B_1 \\ & + \{(i\bar{\gamma}_2 - \hat{n}_{21})\text{ch}\bar{\varepsilon}_2 - i\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_2\text{sh}\bar{\varepsilon}_2\} B_3 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

với  $\bar{\varepsilon}_i = kh\bar{\varepsilon}_i$ .

Phương trình (10), (11) viết lại dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ B_4 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

Trong hệ phương trình (12) các biên độ  $B_2, B_4, B_1, B_3$  là khác không, nên ta có:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0 \quad (13)$$

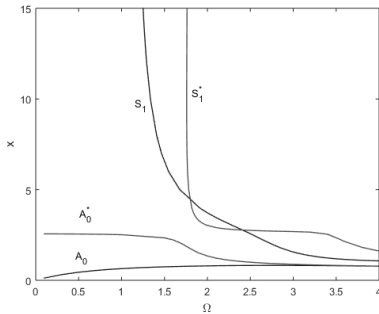
Từ (13), ta có được:

$$\begin{aligned} & i\hat{n}_{22}[\bar{\beta}; \bar{\alpha}]\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\text{ch}\bar{\varepsilon}_2 - \hat{n}_{11}[\bar{\gamma}]\text{sh}\bar{\varepsilon}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 \\ & + \{(\bar{\beta}_1 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_1)(i\bar{\gamma}_2 - \hat{n}_{21}) - i\hat{n}_{11}\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_1\}\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 \\ & - \{(\bar{\beta}_2 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_2)(i\bar{\gamma}_1 - \hat{n}_{21}) - i\hat{n}_{11}\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_2\}\text{ch}\bar{\varepsilon}_2\text{sh}\bar{\varepsilon}_1 = 0 \\ & - \hat{n}_{11}[\bar{\gamma}]\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\text{ch}\bar{\varepsilon}_2 + i\hat{n}_{22}[\bar{\beta}; \bar{\alpha}]\text{sh}\bar{\varepsilon}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 \\ & - \{(\bar{\beta}_2 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_2)(i\bar{\gamma}_1 - \hat{n}_{21}) - i\hat{n}_{11}\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_2\}\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 \\ & + \{(\bar{\beta}_1 - i\hat{n}_{12}\bar{\alpha}_1)(i\bar{\gamma}_2 - \hat{n}_{21}) - i\hat{n}_{11}\hat{n}_{22}\bar{\alpha}_1\}\text{ch}\bar{\varepsilon}_2\text{sh}\bar{\varepsilon}_1 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Phương trình (14), (15) là các phương trình tán sắc của sóng Lamb truyền trong cấu trúc sandwich của môi trường đàn hồi trục hướng nén được. Phương trình này là một kết quả mới và hoàn toàn ở dạng tường minh.

**Kết quả số:** Khảo sát sóng Lamb truyền trong cấu trúc sandwich của vật liệu trục hướng với các tỷ số hằng số vật liệu:

$$\begin{aligned} c_{11}/c_{66} &= 2.5, \quad c_{22}/c_{66} = 3, \quad c_{12}/c_{66} = 0.4, \\ \bar{c}_{12}/\bar{c}_{22} &= 3.1, \quad \bar{c}_{22}/\bar{c}_{66} = 1, \quad \bar{c}_{12}/\bar{c}_{66} = 0.5, \\ c_{66}/\bar{c}_{66} &= 0.8, \quad c_2/\bar{c}_2 = 1, \quad L = 0.5. \end{aligned}$$



**Hình 2.** Hình vẽ biểu diễn mode  $A_0$  và  $S_1$  của phương trình (14) (các đường màu xanh);  $A_0^*$ ,  $S_1^*$  của phương (15) (các đường màu đỏ).

## 5. PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC CHO MỘT LỚP TRỤC HƯỚNG NÉN ĐƯỢC

Khi độ dày của 2 lớp thứ nhất và thứ 3 bằng không ( $h = 0$ ), tức là  $\bar{\varepsilon}_i = 0$ . Thay  $\bar{\varepsilon}_i = 0$  vào các phương trình (14), (15), ta có:

$$\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_2\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\beta}_2\bar{\gamma}_1\text{ch}\bar{\varepsilon}_2\text{sh}\bar{\varepsilon}_1 = 0 \quad (16)$$

$$\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_2\text{ch}\bar{\varepsilon}_2\text{sh}\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\beta}_2\bar{\gamma}_1\text{ch}\bar{\varepsilon}_1\text{sh}\bar{\varepsilon}_2 = 0 \quad (17)$$

Các phương trình (16), (17) là các phương trình tán sắc của sóng Lamb truyền trong một lớp vật liệu đàn hồi trục hướng nén được. Đây là một kết quả mới.

## 6. KẾT LUẬN

Báo cáo nghiên cứu bài toán về sự truyền của sóng Lamb trong cấu trúc sandwich của môi trường đàn hồi trục hướng nén được. Các kết quả mới của báo cáo thu được là đã tìm ra được các phương trình tán sắc cho sóng Lamb truyền trong cấu trúc sandwich trục hướng. Từ các phương trình này, báo cáo đã đưa được về phương trình tán sắc của sóng Lamb truyền trong một lớp trục hướng.

## 7. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Kaplunov, J., Prikazchikov, D.A. and Prikazchikova, L.A., 2017. Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *Int. J. Solids Struct.* **113**, pp: 169-179
- [2] Lamb, H., 1917. On waves in an elastic plate. *Proc. R. Soc. Lond. A* **93**, pp: 114-128.
- [3] Lee, P.C.T. and Chang, N., 1979. Harmonic waves in elastic sandwich plates, *J. Elasticity* **9**, pp: 51-69.
- [4]. Vinh, P.C., Anh, V.T.N., Linh, N.T.K., 2016, On a technique for deriving the explicit secular equation of Rayleigh waves in an orthotropic half-space coated by an orthotropic layer, *Waves in Random and Complex Media*, **26**, pp: 176-188

